CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

1. Determinați numerele reale $x \in [-1,0]$ și $y \in [1,2]$ pentru care $4x^2 + y^2 + 16 \le 4xy - 16x + 8y$.

Soluție.

Relația din enunț revine la $(2x - y + 4)^2 \le 0$, de unde rezultă că $y = 2x + 4$. 4p

Însă $y \in [1,2]$ și $2x + 4 \in [2,4]$, prin urmare $y = 2,\ x = -1$. 3p

2. Un automobil pleacă din București către Iași la ora 0^{00} și merge cu o viteză constantă de 60 km/h. Un alt automobil pleacă din Iași către București la ora 1^{00}, cu viteza constantă de 70 km/h. Se știe că distanța Iași - București este de 420 km. Notăm cu *f*(*x*) și *g*(*x*) distanțele la care se află față de București primul, respectiv al doilea automobil la ora *x*.

a) Determinați legile de corespondență ale funcțiilor $f, g : [0,7] \to \mathbb{R}$.

b) Trasați graficele celor două funcții.

c) Aflați ora la care se vor întâlni cele două automobile (cu aproximație de un minut).

Soluție.

a) $f(x) = 60 \cdot x,\ g(x) = \begin{cases} 420, & x \in [0,1) \\ -70x + 490, & x \in [1,7] \end{cases}$. 3p

b) Trasarea graficelor 2p

c) Ecuația $f(x) = g(x)$ are unica soluție $x = 3\frac{10}{13}$; cu aproximație de un minut, ora cerută este 3:46.
....2p

3. Pe latura *BC* a triunghiului *ABC* se consideră punctul *D* astfel încât $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$. Pe segmentul *AD* se iau punctele $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ astfel încât, pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, punctul A_i împarte segmentul *AD* în raportul $\frac{AA_i}{AD} = \frac{i}{n}$. Arătați că există un punct A_i pentru care dreapta BA_i trece prin mijlocul segmentului *AC* dacă și numai dacă numărul natural nenul *n* este divizibil cu 4.

Gazeta Matematică (Supliment)

Soluție.

Notăm cu *M* mijlocul segmentului *AC* și fie $\{S\} = BM \cap AD$. Folosind teorema lui Menelaus, obținem că $\frac{AS}{AD} = \frac{3}{4}$. 3p

Există un punct A_i care coincide cu *S* dacă și numai dacă $\frac{AA_i}{AD} = \frac{3}{4}$, deci dacă și numai dacă există *i* pentru care $\frac{i}{n} = \frac{3}{4}$. 2p

Întrucât numerele 3 şi 4 sunt relativ prime, condiția anterioară este echivalentă cu faptul că *n* este divizibil cu 4. .... 2p

4. Considerăm triunghiul ABC isoscel cu $AB = AC = 25$, iar $BC = n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

a) Câte triunghiuri de acest tip există?

b) Dați patru exemple de valori ale lui *n* pentru care aria triunghiului se exprimă printr-un număr rațional şi patru exemple de valori ale lui *n* pentru care aria se exprimă printr-un număr irațional.

Gabriel Popa

Soluție.

a) Triunghiul *ABC* există dacă şi numai dacă $|AB - AC| < BC < AB + BC$, adică $0 < BC < 50$. Cum $BC = n \in \mathbb{N}$, rezultă că $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 49\}$; există 49 de triunghiuri ca în enunț. 3p

b) Lipind pe o catetă două triunghiuri dreptunghice congruente cu laturile exprimate prin numere naturale, obținem un triunghi isoscel cu aria exprimată printr-un număr natural. Astfel, prima cerință revine la găsirea unor triplete pitagorice cu cel mai mare termen 25; observăm că $15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2 = 25^2$, deci pentru a obține triunghiuri cu ariile exprimate prin numere raționale putem considera $n \in \{14, 30, 40, 48\}$. 2p

Se verifică imediat că, pentru $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, ariile se exprimă prin numere iraționale. 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A

1. a) Unui angajat i se reduce salariul cu 25%. Cu cât la sută trebuie să i se mărească salariul pentru ca acesta să ajungă la valoarea inițială?
b) Doi angajați au acelaşi salariu. Pe parcursul a trei ani, primului angajat i se reduce salariul cu 25%, după care i se măreşte cu 25%. Al doilea angajat suferă întâi o diminuare a salariului cu 25%, după care obține o majorare de 10% şi apoi o altă majorare cu 15%. Care dintre cei doi angajați va avea salariul mai mare la final?

Gazeta Matematică (Supliment)

Soluție.

a) Fie x valoarea inițială a salariului. După reducere, salariul devine $x-\frac{25}{100}x=\frac{3x}{4}$. Pentru ca salariul mărit cu $p\%$ să ajungă la valoarea inițială, impunem condiția $\frac{3x}{4}+\frac{p}{100}\cdot\frac{3x}{4}=x$, de unde $p=\frac{100}{3}=33,(3)$. 3p

b) Salariul final al primului angajat este $x-\frac{25}{100}\cdot x+\frac{25}{100}\cdot(x-\frac{25}{100}\cdot x)=\frac{15x}{16}$. Salariul celui de-al doilea angajat devine $x-\frac{25}{100}\cdot x=\frac{3x}{4}$ după diminuare, $\frac{3x}{4}+\frac{10}{100}\cdot\frac{3x}{4}=\frac{33x}{40}$ după prima mărire şi $\frac{33x}{40}+\frac{15}{100}\cdot\frac{33x}{40}=\frac{759x}{800}$ la final. 3p

Cum $\frac{15x}{16}=\frac{750x}{800}<\frac{759x}{800}$, al doilea angajat va avea salariul final mai mare. 1p

2. a) Dacă x, y sunt numere reale, arătați că $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

b) Fie $a>1, b>0$. Demonstrați că are loc inegalitatea $\log_a(a^b-1)\cdot\log_a(a^b+1)<b^2$.

Soluție.

a) După calcule, inegalitatea dată revine la $(x-y)^2\ge 0$, ceea ce este adevărat. 3p

b) Aplicând a), obținem că

$$\log_a(a^b-1)\cdot\log_a(a^b+1)\le\left(\frac{\log_a(a^b-1)+\log_a(a^b+1)}{2}\right)^2=\left(\frac{\log_a(a^b-1)(a^b+1)}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\log_a(a^{2b}-1)}{2}\right)^2<\left(\frac{\log_a a^{2b}}{2}\right)^2=\left(\frac{2b}{2}\right)^2=b^2.$$ 4p

3. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ astfel încât $f(0)=\frac{1}{2}$ şi, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$, are loc egalitatea $f(x+y)=f(x)\cdot f(-y)+f(-x)\cdot f(y)$.

a) Demonstrați că $f(x)=f(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați funcția *f*.

Soluție.

a) Pentru $y = 0$ în egalitatea din ipoteză, se obține că $f(x) = f(x)\cdot\frac{1}{2} + f(-x)\cdot\frac{1}{2}$, de unde $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 3p

b) Folosind a), egalitatea din ipoteză devine $f(x+y) = f(x)\cdot f(y) + f(x)\cdot f(y) = 2\cdot f(x)\cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. 2p

Pentru $y = -x$, rezultă că $f(0) = 2\cdot f(x)\cdot f(-x) = 2\cdot f^2(x)$, deci $f^2(x) = \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$. Cum *f* ia doar valori nenegative, deducem că $f(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$, şi această funcție verifică ipotezele problemei. 2p

4. Într-o galaxie *complexă*, toate planetele se află pe un acelaşi cerc având drept centru Soarele şi raza egală cu o unitate galactică. Considerăm trei planete *A*, *B* şi *C*, ale căror poziții în galaxie sunt exprimate cu ajutorul numerelor complexe z_A, z_B, z_C astfel încât $z_A + z_B + z_C = 0$.

a) Arătați că pentru orice numere $z, w \in \mathbb{C}$ au loc egalitățile $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$ şi $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - (z\cdot\overline{w} + \overline{z}\cdot w)$, unde $\overline{z}$ este conjugatul numărului complex *z*.

b) Arătați că $|z-z_A|^2 + |z-z_B|^2 + |z-z_C|^2 = 3\cdot(|z|^2+1)$, pentru orice corp ceresc (nu neapărat planetă) reprezentat în galaxie cu ajutorului numărului complex *z*.

c) Dacă triunghiul *ABC* (al planetelor) este echilateral, iar *M* este un corp ceresc situat pe cercul înscris în acest triunghi, arătați că suma $MA^2 + MB^2 + MC^2$ este constantă.

Ioana Cătălina Anton

Soluție.

a) Dacă $z = a + bi$, , cu $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $z\cdot\overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$. 1p

Apoi, $|z-w|^2 = (z-w)\cdot\overline{(z-w)} = (z-w)\cdot(\overline{z}-\overline{w})$, de unde rezultă imediat concluzia. 2p

b) Aplicăm a), obținem că $|z-z_A|^2 + |z-z_B|^2 + |z-z_C|^2 = 3|z|^2 + |z_A|^2 + |z_B|^2 + |z_C|^2 - z\cdot\overline{(z_A+z_B+z_C)} - \overline{z}\cdot(z_A+z_B+z_C)$, relație ce conduce la identitatea dorită. 2p

c) Fie *M*(*z*) din galaxia complexă. Conform b), avem că $MA^2 + MB^2 + MC^2 = |z-z_A|^2 + |z-z_B|^2 + |z-z_C|^2 = 3(|z|^2+1)$. Însă *M* se află pe cercul înscris în triunghiul *ABC* echilateral, deci $|z| = \frac{1}{2}$, adică suma respectivă este constantă. 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI-A

1. Fie matricele $A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați det A_{2012}.

b) Arătați că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât detA_1 + detA_2 + ... + detA_n > 2012.

Soluție.

a) $\det A_{2012} = \frac{1}{2012}$ 3p

b) $\det A_1 + \det A_2 + ... + \det A_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ 2p

Avem că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}; \forall m \geq 1$ 1p

De aici, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^{4024}} \geq 1 + \frac{4024}{2} = 2013 > 2012$ 1p

2. Primul pătrat magic publicat în Europa a apărut într-o pictură din anul 1514 a pictorului german Albrecht Dürer; el arăta ca în figura alăturată. Pătratul magic este completat cu numerele 1, 2, 3, ..., 15, 16 astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană, de pe fiecare diagonală, precum şi suma numerelor din colțuri să fie aceeaşi.

a) Aflați valoarea lui *a*.

b) Arătați că suma celor patru numere din centrul pătratului este aceeaşi cu suma numerelor de pe fiecare linie.

c) Calculați suma numerelor din căsuțele haşurate.

16			***a***
b	**15**	**14**	***c***

Soluție.

a) Suma tuturor numerelor din pătrat este 1 + 2 + ... + 16 = (16 · 17): 2 = 136. Atunci suma numerelor de pe o linie, coloană, diagonală, colțuri este 136 : 4 = 34. .... 2p

$16 + a + b + c = 34 \Rightarrow a + b + c = 18$, $b + c + 29 = 34 \Rightarrow b + c = 5$, a = 13 .... 1p

b) Suma numerelor de pe linia 1, coloana 4, linia 4, coloana 1 este 4·34-(16+a+b+c)=3·34=102 ... 1p

Suma numerelor elementelor din centrul pătratului va fi: $136 - 102 = 34$ 1p

c) S = 34 + 34 + 34 – a = 89 .... 2p

3. Date două funcții $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vom spune că *funcția f este limitată în raport cu funcția g* dacă există un număr real nenul *a* astfel încât limita $\lim_{x\to\infty}\left(f(x) - a \cdot g(x)\right)$ există şi este finită.

a) Dacă *f* este limitată în raport cu *g*, arătați că şi *g* este limitată în raport cu *f*.

b) Dacă *f* este limitată în raport cu *g* şi *g* este limitată în raport cu *h*, arătați că *f* este limitată în raport cu *h*.

Gazeta Matematică (Supliment)

Soluție:

a) Dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-a\cdot g(x)\right)=l\in\mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\left(g(x)-\frac{1}{a}\cdot f(x)\right)=-\frac{l}{a}\in\mathbb{R}$. 3p

b) Dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-a\cdot g(x)\right)=l_1\in\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\left(g(x)-b\cdot h(x)\right)=l_2\in\mathbb{R}$, unde a şi b sunt nenule, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-ab\cdot h(x)\right)=l_1+al_2\in\mathbb{R}$, cu ab nenul. 4p

4. Fie $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați a_1.

b) Demonstrați că $a_n=\frac{1}{2}n^2+a_{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculați a_{2012}.

Soluție.

a) $a_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. 3p

b) Observăm că $a_n=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos nx+\cos nx-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos nx}{x^2}+$

$+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\ldots\cdot\cos(n-1)x}{x^2}\cdot\cos nx=\frac{1}{2}n^2+a_{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. 2p

c) $a_{2012}=\frac{1}{2}\left(1^2+2^2+\ldots+2012^2\right)=\frac{2012\cdot 2013\cdot 4025}{12}$ = 1358489825. .... 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ – 10 martie 2012
Profil real, specializarea științele naturii

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII-A

1. a) Calculați $\int_0^1 (1+u)^n\,du$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Aflați suma $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție.

a) $\int_0^1 (1+u)^n\,du=\left.\frac{(1+u)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ 3p

b) $\int_0^1 (1+u)^n\,du=\int_0^1\left(C_n^0+C_n^1u+C_n^2u^2+...+C_n^nu^n\right)du$ 2p

$=\left.\left(C_n^0u+C_n^1\frac{u^2}{2}+C_n^2\frac{u^3}{3}+...+C_n^n\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)\right|_0^1=C_n^0+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+...+\frac{C_n^n}{n+1}$ 1p

Din punctul a) $\int_0^1 (1+u)^n\,du=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$,obținem în final $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+...+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ ..1p

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{2010}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Dacă $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, arătați că $F(1)>3$.

Gazeta Matematică (Supliment)

Soluție.

$F(x)=\int_0^1\left(1+t+t^2+...+t^{2010}\right)dt=$ 1p

$=\left.\left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+...+\frac{t^{2011}}{2011}\right)\right|_0^x=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^{2011}}{2011}$ 2p

$F(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2011}$ 2p

$F(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2011}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{16}\right)>$

$>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$ 2p

3. Demonstrați că mulțimea $\mathcal{G}=\left\{\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$ este grup în raport cu înmulțirea matricelor. Cum explicați că, deși sunt inversabile față de înmulțirea din grupul $\mathcal{G}$, matricele din $\mathcal{G}$ au toate determinatul nul ?

Soluție:
Verificăm condițiile de grup
- lege de compoziție ($\mathcal{G}$ parte stabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu $\cdot$) 1p
- asociativitatea 1p
- element neutru $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 2p
- orice element din $\mathcal{G}$ este simetrizabil 1p

Deoarece elementul neutru în $\mathcal{G}$ este matricea $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, care nu coincide cu $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, inversibilitatea în ($\mathcal{G}$, $\cdot$) nu are nici o legătură cu inversabilitatea în monoidul ($\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\cdot$). 2p

4. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_{25},+,\cdot)$.

a) Calculați $\sum_{\hat{k}\in\mathbb{Z}_{25}} \hat{k}$ şi $\prod_{\hat{k}\in\mathbb{Z}_{25}} \hat{k}=\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\ldots\cdot\widehat{24}$.

b) Dacă alegem un element din inelul $(\mathbb{Z}_{25},+,\cdot)$, ce este mai probabil: ca acesta să fie inversabil sau să fie divizor a lui zero ?

c) Doi copii, Traian şi Emil, joacă următorul joc: fiecare extrage, pe rând, din mulțimea $\mathbb{Z}_{25}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{23},\widehat{24}\}$, un număr de elemente cuprins între 1 şi 4. Câştigă cel care poate extrage ultimul. Ştiind că primul extrage Traian, indicați o strategie de câştig pentru Emil.

Soluție

a) $\sum_{\hat{k}\in\mathbb{Z}_{25}} \hat{k}=\hat{0}+\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\ldots+\widehat{22}+\widehat{23}+\widehat{24}=\hat{0}$ 2p

$\prod_{\hat{k}\in\mathbb{Z}_{25}} \hat{k}=\hat{1}\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}\cdot\ldots\cdot\widehat{24}=\hat{0}$ 2p

b) Probabilitatea de a alege un element inversabil este $p_1=\frac{20}{25}=80\%$, probabilitatea de a alege un divizor al lui zero $p_2=\frac{4}{25}=16\%$. Deci $p_1>p_2$ 2p

c)
Dacă Traian alege pentru extragere 1 element, atunci Emil va extrage 4 elemente.
Dacă Traian alege pentru extragere 2 elemente, atunci Emil va extrage 3 elemente.
Dacă Traian alege pentru extragere 3 elemente, atunci Emil va extrage 2 elemente.
Dacă Traian alege pentru extragere 4 elemente, atunci Emil va extrage 1 element.
În acest fel Emil va reuşi să extragă ultimul şi în consecința va câştiga. 1p